

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 4: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC.

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		6		-26		$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Cách 2: $y'' = 6x - 6$.

$y''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$.

$y''(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Câu 2: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 3: Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -6x^2 - 6x - 6 = -6 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 4: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			-3			-5		$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = -3$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -5$.

Cách 2: $y'' = 6x^2 - 4$.

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = -3$.

$y''(\pm\sqrt{2}) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -5$.

Câu 5: Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$		-1		-5		-1		$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CD} = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -5$.

Cách 2: $y'' = -12x^2 + 8$.

$y''(\pm\sqrt{2}) = -16 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CD} = -1$.

$y''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -5$.

Câu 6: Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 8x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = 1$.

Cách 2: $y'' = 12x^2 + 8, y''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = 1$.

Câu 7: Tìm cực trị của hàm số $y = (1 - x)^3(3x - 8)^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 15(1 - x)^2(3x - 8)(2 - x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-4	0	0	$-\infty$

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{8}{3}, y_{CD} = 0$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = -4$.

DẠNG 5: RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM BẬC 3

1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0), (1)$

a. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c; \Delta' = b^2 - 3ac$

• Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$.

• Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.

b. Trong trường hợp $\Delta' > 0$, gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1), trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $y' = 0$.

Ta có $f(x) = (mx + n) \cdot f'(x) + r(x)$, với $r(x)$ là nhị thức bậc nhất.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = r(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = r(x_2) \end{cases}$$

Suy ra tọa độ A, B thỏa mãn phương trình $y = r(x)$.

Do đó phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị A, B là $y = r(x)$.

Công thức tính nhanh: Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị, của đồ thị hàm số (1)

là: $y = r(x) = -\frac{2d'}{9a}x + \frac{9ad-bc}{9a}$

Cách dùng MTCT

- Nhập biểu thức $ax^3 + bx^2 + cx + d - (3ax^2 + 2bx + c) \left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right)$

- Cho $x = i$ ta được kết quả $Ai + B$. Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = Ax + B$.

Câu 8: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4m + 3)x + 2021 - 2020m$ có cực trị?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4m + 3)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0 \Leftrightarrow 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$. Vậy $m > \frac{3}{4}$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

Lời giải

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $\Leftrightarrow (x - 1)[mx^2 - (m - 1)x + m + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0(*) \end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - (m - 1) + m + 1 \neq 0 \\ (m - 1)^2 - 4m(m + 1) > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 \neq 0 \\ -3m^2 - 6m + 1 > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 10: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là khoảng $(a; b)$. Giá trị a, b bằng

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$;

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$.

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}.$$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = -2x - m$.

$$\text{Khi đó: } y_{CD} \cdot y_{CT} = y(m + 1) \cdot y(m - 1) = (-2m - 2 - m)(-2m + 2 - m) = (3m + 2)(3m - 2)$$

$$y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow (3m + 2)(3m - 2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}; b = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } a \cdot b = -\frac{4}{9}.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị là (C_m) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4, với $C(1; 4)$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

$$\text{Đạo hàm } y' = 3x^2 - 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, khi $m \neq 0$

$$\text{Tọa độ hai điểm cực trị là } A(0; 4m^2 - 2); B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{1 + 4m^4}.$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$$

$$\text{Khoảng cách từ điểm } C \text{ đến đường thẳng } AB \text{ là: } d(C, AB) = \frac{|6 - 2m^2|}{\sqrt{1 + 4m^4}}.$$

$$\text{Suy ra, diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \frac{1}{2} \cdot d(C, AB) \cdot AB = |6m - 2m^3|.$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } |6m - 2m^3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}.$$

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

Lời giải

$$y' = -3x^2 + 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m.$$

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\text{Khi đó 2 điểm cực trị là: } A(0; -3m - 1); B(2m; 4m^3 - 3m - 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3).$$

$$\text{Trung điểm } I \text{ của } AB \text{ có tọa độ: } I(m; 2m^3 - 3m - 1).$$

$$\text{Đường thẳng } d: x + 8y - 74 = 0 \text{ có một VTCP } \vec{u} = (8; -1).$$

Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua d .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{AB} \perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3 - 23m - 82 = 0 \\ -4m^3 + 16m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

Lời giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

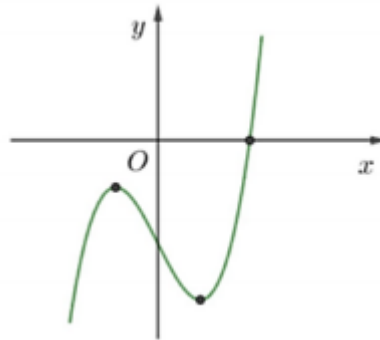
$$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 \text{ có } \Delta' = -2m^2 + 2m + 7.$$

Để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên được } m \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Lúc này, hai nghiệm $x_1; x_2$ của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm cùng 1 phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm, tức là, phương trình $x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m = -1$ thì phương trình là $x^3 - x + 2 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = -1$.

Xét $m = 0$ thì phương trình là $x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = 0$.

Xét $m = 1$ thì phương trình là $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt nên loại $m = 1$.

Xét $m = 2$ thì phương trình là $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = 2$.

Đáp số: $m \in \{-1; 0; 2\}$

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2mx + m + 2; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0(1).$$

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases} (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là: $y = \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)x + \frac{1}{3}m(m+2).$

Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu dương thì $y_1 + y_2 > 0$ và đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m$.

$$\begin{aligned} \text{Nên } y_1 + y_2 > 0 &\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(x_1 + x_2) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(2m) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0 \Leftrightarrow 2m(-2m^2 + 3m + 6) > 0 \\ &\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right) (**). \end{aligned}$$

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0$ (2) có một nghiệm đơn duy nhất.

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0(3) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là $\Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$ (***).

Kết hợp (*), (**), (***) ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2:

$$\text{Ta có : } y' = x^2 - 2mx + m + 2; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0(1).$$

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$ (*).

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có 1 nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0$ (2) có một nghiệm đơn duy nhất.

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0(3) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là $\Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$ (**).

Để giá trị tại điểm uốn luôn dương: $y' = x^2 - 2mx + m + 2, y'$.

$$y'. \text{ Ta có : } y_{(m)} > 0 \Rightarrow \frac{m^3}{3} - m^3 + m(m+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m(-2m^2 + 3m + 6) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{3}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{3}\right) (**).$$

Kết hợp (*), (**), (***) ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2021$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ bằng

Lời giải

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ thì $\begin{cases} \Delta' > 0 & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 2 & (2) \end{cases}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow -2m^2 + 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{2+\sqrt{6}}{2} (*)$.

Mặt khác ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m}$ (3).

Từ (2) và (3) ta có $x_1 = \frac{2}{m}$.

Vì $y'(x_1) = 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{2}{m}\right)^2 - 2(m-1) \cdot \frac{2}{m} + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Vậy tổng bình phương tất cả các giá trị của m thỏa mãn YCBT là: $2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{52}{9}$.

Câu 16: Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ có điểm cực tiểu của nằm bên phải trục tung.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2x + m$

Để hàm số có cực tiểu, tức hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Điều này tương đương với pt $3x^2 + 2x + m = 0$ (1) có hai nghiệm pb; có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$.

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_{CD}, x_{CT} là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lí Viet ta

có $\begin{cases} x_{CD} + x_{CT} = -\frac{2}{3} < 0 & (2) \\ x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{m}{3} & (3) \end{cases}$, trong đó $x_{CD} < x_{CT}$ vì hệ số của x^3 lớn hơn 0.

Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có: $x_{CT} > 0$, kết hợp (2) và (3) suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Mà $m \in (-10;10), m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; -7; \dots; -1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn YCBT là: -45 .

DẠNG 6: RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM TRÙNG PHƯƠNG

I: KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là (C).

+) Đồ thị (C) có đúng một điểm cực trị khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

+) Đồ thị (C) có ba điểm cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ và tam giác ABC luôn là tam giác cân tại A.

II. CÔNG THỨC NHANH MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP THƯỜNG GẶP

DỮ KIỆN	CÔNG THỨC NHANH	CHỨNG MINH
$\widehat{BAC} = \alpha$	$\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$	Áp dụng định lý cosin trong $\triangle ABC$ ta có điều phải chứng minh.
$\triangle ABC$ vuông	$b^3 + 8a = 0$	$\triangle ABC$ vuông cân $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$ Hoặc: $\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$
$\triangle ABC$ đều	$b^3 + 24a = 0$	$\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$ Hoặc $\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$
$S_{\triangle ABC}$	$S_{\triangle ABC} = a \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^5$	Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AI$ $= \sqrt{\frac{-b}{2a}} \cdot \left -\frac{b^2 - 4ac}{4a} - c \right $ $= a \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^5$
Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$	Áp dụng công thức $R = \frac{AB^2}{2AI} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\triangle ABC}} \Leftrightarrow R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$

Bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$	$r = \frac{b^2}{4 a + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$	Áp dụng công thức $r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p}$ $\Leftrightarrow r = \frac{b^2}{4 a + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$
$\triangle ABC$ có trọng tâm là gốc tọa độ O	$b^2 - 6ac = 0$	Áp dụng công thức tọa độ trọng tâm cho $\triangle ABC$ ta có: $-\frac{b^2 - 4ac}{2a} + c = 0 \Leftrightarrow b^2 - 6ac = 0$
$\triangle ABC$ có trục tâm là gốc tọa độ O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$	$\triangle ABC$ có trục tâm là gốc tọa độ O khi $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a - 4ac = 0$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$	$x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{4}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{4}{4a}\right) = 0$	
Phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị	$y = \frac{1}{2}bx^2 + c$	Lấy y chia y' ta được phần dư là $r(x) = \frac{1}{2}bx^2 + c$. Khi đó phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị là $y = r(x) = \frac{1}{2}bx^2 + c$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^4 - (m+1)x^2 + 4$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y' = 8x^3 - 2(m+1)x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{(m+1)}{4}(1) \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)}{4} > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Cách 2:

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi $ab < 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{cases}$$

Đồ thị số có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > -1$ (*).

Khi đó, ba điểm cực trị là: $A(0; m^2), B(\sqrt{m+1}; -2m-1), C(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Ta thấy $A \in Oy$, B, C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A .

Do đó tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{m+1}; -(m+1)^2), \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2).$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 (\text{loại}) \\ m = 0 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Chú ý có thể sử dụng điều kiện sau:

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H(0; -2m-1)$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi $AH = BH \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^4} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = 0$ thỏa mãn (*).

Cách 2:

Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi: $b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow -8(m+1)^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có đồ thị (C_m) . Xác định tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 8(m-1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8(m-1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2(m-1) \end{cases}$$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2(m-1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là:

$$A(0; 2m-1); \quad B(\sqrt{2(m-1)}; -4(m-1)^2 + 2m-1); C(-\sqrt{2(m-1)}; -4(m-1)^2 + 2m-1) \text{ và tam giác } ABC \text{ luôn là tam giác cân tại } A \text{ vì: } AB = AC = \sqrt{2(m-1) + 16(m-1)^4}; \\ BC = 2\sqrt{2(m-1)}.$$

$$\text{Do đó tam giác } ABC \text{ đều khi } AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{2(m-1) + 16(m-1)^4} = 2\sqrt{2(m-1)}.$$

$$\Leftrightarrow 16(m-1)^4 - 6(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \\ (m-1)^3 = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 (\text{loại}) \\ m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2:

Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1$

.

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác đều khi: $b^3 + 24a = 0 \Leftrightarrow -64(m+1)^3 + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Câu 20: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = x^4 + 2mx^2 - 1$; $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$.

Đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là: $A(0; -1)$, $B(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$, $C(\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$.

Gọi H là trung điểm BC nên $H(0; -m^2 - 1)$.

$AH = \sqrt{(-m^2)^2} = m^2$; $BC = \sqrt{(2\sqrt{-m})^2} = 2\sqrt{-m}$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot 2\sqrt{-m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$.

Cách 2:

Hàm số có ba điểm cực trị khi $m < 0$.

Áp dụng công thức: $S_{\Delta ABC} = |a| \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}} \right)^5$,

ta có: $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{-\frac{2m}{2}} \right)^5 = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{-m} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$, với m là tham số thực. Xác định các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba cực trị đồng thời các điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

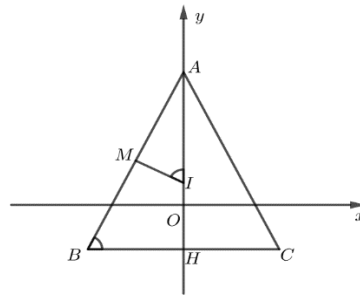
$A(0; m - 1)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$, $C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$.

Cách 1: Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|y_B - y_A| \cdot |x_C - x_B| = m^2\sqrt{m}$ và $AB = \sqrt{m^2 + m}$, $BC = 2\sqrt{m}$.

$$\text{Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp } R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\triangle ABC}} = \frac{(m^2+m) \cdot 2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}.$$

$$R = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^2+m)\sqrt{m}}{2m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2m} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Cách 2: Gọi M, H lần lượt là trung điểm của AB, BC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



$$AB = \sqrt{m^2 + m}, AH = m^2. \text{ Ta có } \triangle AMI \text{ đồng dạng } \triangle AHB \Rightarrow R = \frac{AB^2}{2AH}.$$

$$R = 1 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{2AH} = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2+m}{2m^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2m} = 1 \Leftrightarrow m = 1,.$$

Vậy $m = 1$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}.$$

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị: $A(0; m), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m), C(\sqrt{m}; -m^2 + m)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có $H(0; -m^2 + m)$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow AB^2 = 2AH \cdot R \text{ trong đó } \begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}.$$

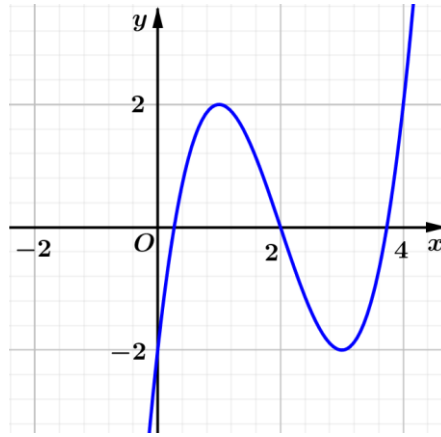
$$\text{Suy ra } m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m(m^3 - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m(m - 1)(m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Đổi chiếu điều kiện ta được } S = \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

DẠNG 6: CỰC TRỊ CỦA HÀM $y = |f(x)|, y = f(|x|)$

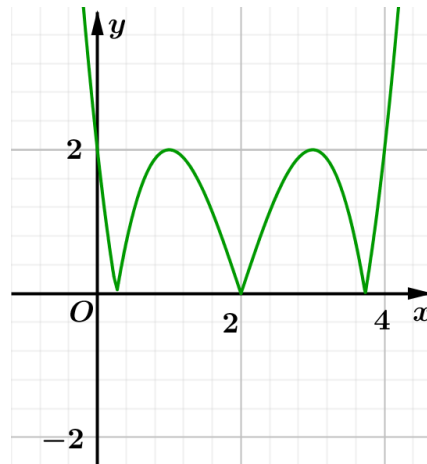
Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.



Lời giải

Ta có $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$.

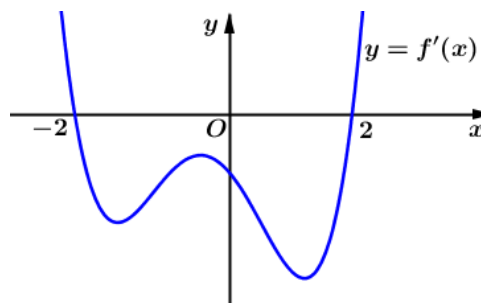
Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

CÔNG THỨC TÍNH NHANH: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và số lần đổi dấu của hàm số $f(x)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có $f(-2) < 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

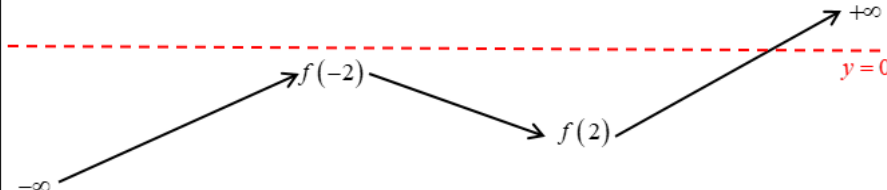


Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$.

Lời giải

Vì $y = f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $f(-2) < 0$, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						
$ f(x) $						

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 25: Cho hàm số $y = |x^3 - 3x|$. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

Lời giải

+) Đặt $f(x) = x^3 - 3x$, tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

+) Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							
$ f(x) $							

+) Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(|x - 3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x - 3|)$.

Ta có $g'(x) = [f(|x - 3|)]' = (|x - 3|)' \cdot f'(|x - 3|) = \frac{x-3}{|x-3|} f'(|x - 3|)$.

Có $g'(x)$ không xác định tại $x = 3$.

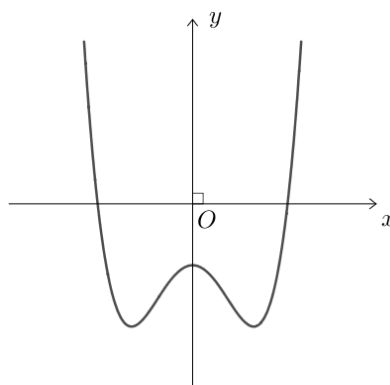
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x - 3|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 3| = -2 \\ |x - 3| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = f(|x - 3|)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây

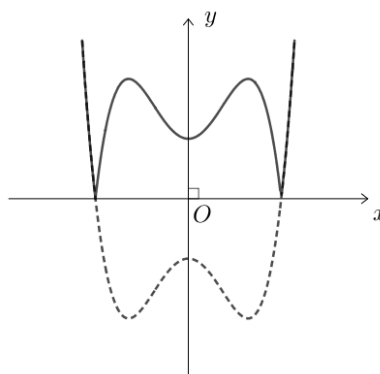


Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị, ta kết luận đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m - 1)x + (2 - m)$.

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow y = f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ có hai điểm cực trị cùng nằm bên phải trục tung $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m - 1)^2 - 3(2 - m) > 0 \\ 2m - 1 > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

$m < 2$.

Câu 29: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$m-5$	m		$+\infty$
					$m-32$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị $(C): y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ luôn có 3 cực trị.

Do đó đồ thị $(H): y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị khi phương trình $y = f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m - 32 < 0 \leq m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5 \leq m < 32 \end{cases}$$

Mà $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{5; 6; \dots; 31\}$

Vậy có $31 - 5 + 1 = 27$ giá trị m thỏa yêu cầu bài.

Câu 30: Cho hàm số $y = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - (2m + 1)x^2 + 3mx - 5$, có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m + 1)x + 3m$.

Hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị dương. Khi đó phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao

$$\text{cho } x_1 \leq 0 < x_2. \Rightarrow x_1 = 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 0 \\ \frac{2(2m+1)}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

$$+) x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3.3m < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp 2 trường hợp ta được: $m \leq 0$.

Vậy $m \in -\infty; 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = (m - 1)x^3 - 5x^2 + (m + 3)x + 3$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

Lời giải

- Tập xác định của các hàm số $y = f(x)$ và $y = f(|x|)$ đều là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $y = f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương.

- Xét $m = 1$, ta có $f(x) = -5x^2 + 4x + 3$ có đúng một điểm cực trị là $x = \frac{2}{5} > 0$. Khi đó hàm số $y = f(|x|) = -5x^2 + 4|x| + 3$ có đúng 3 điểm cực trị là $x = -\frac{2}{5}; x = 0; x = \frac{2}{5}$. Nên $m = 1$ thỏa mãn.

- Xét $m \neq 1$ thì $f(x)$ là hàm số bậc 3, ta có $f'(x) = 3(m - 1)x^2 - 10x + m + 3$.

Hàm số $y = f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(m - 1)x^2 - 10x + m + 3 = 0$$

$$+) x_1 = 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 = 0 \\ \frac{10}{3(m-1)} > 0 \end{cases}.$$

$$+) x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3(m - 1)(m + 3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Kết hợp ta thấy tất cả có 4 số nguyên thỏa mãn bài toán là: $m = -2, m = -1, m = 0, m = 1$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ CỰC TRỊ – VD – VDC

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho với mỗi m , hàm số $g(x) = f(-x^3 + 3x^2 + m)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1; 4)$?

Lời giải

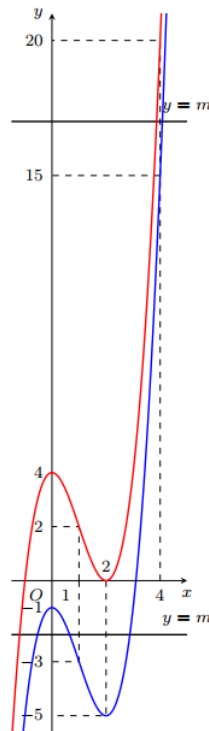
$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác } g'(x) = (-3x^2 + 6x)f'(-x^3 + 3x^2 + m) \quad \text{suy ra} \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \in (1; 4) \\ f'(-x^3 + 3x^2 + m) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Lại có } f'(-x^3 + 3x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + m = 4 \\ -x^3 + 3x^2 + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^3 - 3x^2 + 4 \\ m = x^3 - 3x^2 - 1 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và $y = x^3 - 3x^2 - 1$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ.



Yêu cầu bài toán tương đương $f'(-x^3 + 3x^2 + m) = 0$ có đúng một nghiệm đơn khác 2 trong khoảng $(1; 4)$ suy ra $\begin{cases} -3 \leq m \leq 0 \\ 15 \leq m < 20 \end{cases}$. Vậy có tất cả 9 giá trị.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } y' = (4x^3 - 16x)f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x^4 - 8x^2 + m = 0 \\ x^4 - 8x^2 + m = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ m = -x^4 + 8x^2 \quad (1) \\ m + 10 = -x^4 + 8x^2 \quad (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + 8x^2$.

$$\text{Ta có } g'(x) = -4x^3 + 16x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$		16		0		16		$-\infty$

The graph illustrates the function $g(x) = -x^4 + 8x^2$ plotted against x . The function has a local maximum at $x = -2$ and $x = 2$ with a value of $y = 16$, and a local minimum at $x = 0$ with a value of $y = 0$. Two horizontal lines are shown: $y = m + 10$ (upper line) and $y = m$ (lower line). Arrows indicate the function's behavior as x approaches $-\infty$ and $+\infty$, where y approaches $-\infty$.

Hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm hoặc ba nghiệm trong đó có 1 nghiệm bằng 0 và (2) có 4 nghiệm phân biệt. Do đó dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^4 + 8x^2$ ta có

$$\begin{cases} 0 < m + 10 < 16 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 6 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < m \leq 0. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}.$$

Vậy có 10 giá trị nguyên m .

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$

$$f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x - 8)(x^2 - 8x + m - 1)^2(x^2 - 8x + m)(x^2 - 8x + m - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0(1) \\ x^2 - 8x + m = 0(2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0(3) \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2 - 8x + m - 1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

Lời giải

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x) \cdot f'(x^3 - 3x^2 + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 1$ dấu của $f'(x^3 - 3x^2 + m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ và $x^3 - 3x^2 + m = 2$ phải có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = -3x^2 + 6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				4		
			0				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3 + 3x^2 = m$ và $-x^3 + 3x^2 = m - 2$ phải có ba nghiệm phân biệt là

$$0 < m - 2 < m < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 36: Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		1		-1		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ để hàm số $g(x) = f(f(x) + m)$ có 4 điểm cực trị?

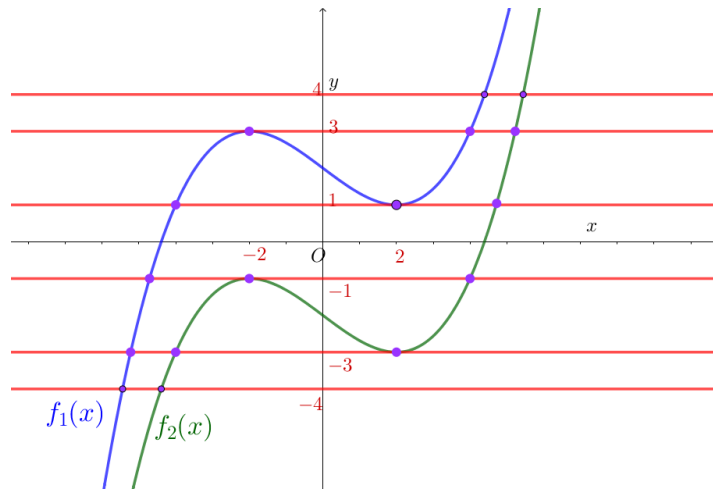
Lời giải

$$g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) + m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) + m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ f(x) + m = -2 \\ f(x) + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ f(x) + 2 = -m \\ f(x) - 2 = -m \end{cases}, \text{ trong đó } x = -2 \text{ và } x = 2 \text{ là hai nghiệm bội lẻ.}$$

Đặt $f_1(x) = f(x) + 2$ và $f_2(x) = f(x) - 2$, ta có đồ thị sau



Với $\begin{cases} m \in (-5; 5) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ và nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow m \in \{-4; -3; -1; 1; 3; 4\}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2-4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

Lời giải.

Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ trong đó } x = -1 \text{ là nghiệm kép.}$$

$$g(x) = f(2x^2 - 12x + m) \Rightarrow g'(x) = (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m)$$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1(1) \\ 2x^2 - 12x = -m(1) \\ 2x^2 - 12x = 4 - m(2) \end{cases}$$

nên ta loại phương trình $2x^2 - 12x + m = -1$

Xét hàm số $y = 2x^2 - 12x$ có đồ thị.

$$y' = 4x - 12$$

Ta có bảng biến thiên

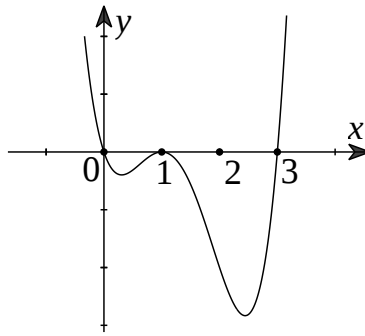
x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-18	$+\infty$

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình (1); (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y = 4 - m$ và $y = -m$ phải cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y = 4 - m$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -m$.

Ta có: $-18 < -m \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

Do hàm số $y = f(x^2 + m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$$y = f(x^2 + m) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 + m)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ nên các nghiệm của pt $x^2 = 1 - m$ không làm $f'(x^2 + m)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm số

$$y = f(x^2 + m) \text{ là các điểm nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \leq 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$.

Câu 39: Cho hàm số $f'(x) = (x - 2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1, x = 2 \text{ là nghiệm kép nên khi qua giá trị } x = 2 \text{ thì } f'(x) \\ x = 3 \end{cases}$$

không bị đổi dấu.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 10x + m + 9)$ khi đó $g'(x) = f'(u) \cdot (2x - 10)$ với $u = x^2 - 10x + m + 9$.

$$\text{Nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10 = 0 \\ (x^2 - 10x + m + 9 - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 1 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (x^2 - 10x + m + 9 - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 8 = 0(1) \\ x^2 - 10x + m + 6 = 0(2) \end{cases}$$

Hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \\ h(5) \neq 0 \\ p(5) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 - m > 0 \\ 19 - m > 0 \\ -17 + m \neq 0 \\ -19 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2)^2(x - 1)(x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \\ x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0(*) \end{cases}$$

Có $x = 2$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$, có $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (TM)}$

Với $m = -1$, có $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

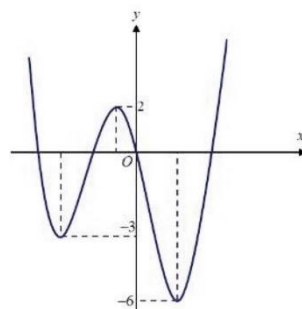
Trường hợp 2: $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm âm

$$\text{Điều kiện tương đương } \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 1^2 - 2(m + 1) \cdot 1 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 41: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

Lời giải

$$\text{Đặt } g(x) = \left| f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2 \right| \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x+2018) \left[f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right]}{\left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|}$$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x + 2018) = 0 & (1) \\ f(x + 2018) = -\frac{m^2}{3} & (2) \end{cases}$$

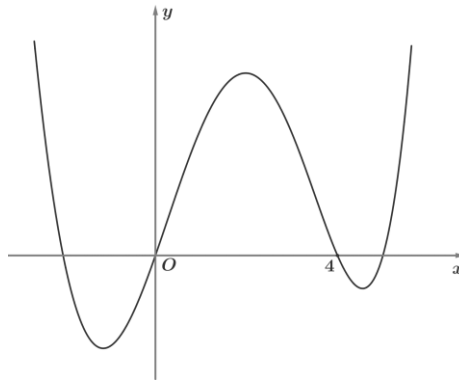
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm đơn

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m^2}{3} > 2 \\ -6 < -\frac{m^2}{3} \leq -3 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow m \in \{3; 4\}.$$

Vậy tổng các phần tử là 7.

Câu 42: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



Lời giải

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

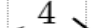
$\swarrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

$$\text{Ta có } g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x. \text{ Cho } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$			-2			0			$+\infty$		
$h'(x)$		+		0		-	0		+			
$h(x)$					4				0			
	$-\infty$											

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

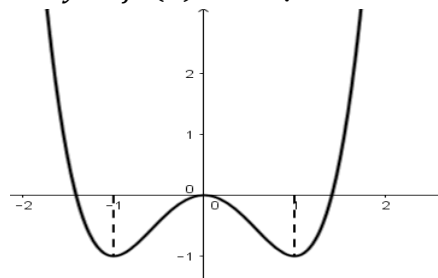
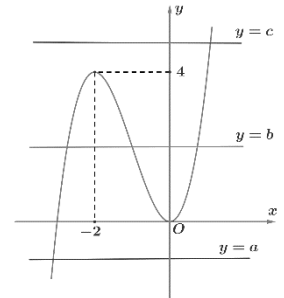
Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1; 4)$?

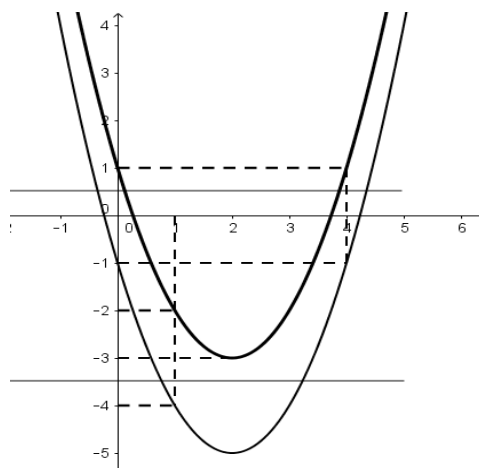
Lời giải

Ta có $g'(x) = 2(x - 2) \cdot f'(x^2 - 4x + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2) \cdot f'(x^2 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (1; 4) \\ x^2 - 4x + m = 1 \\ x^2 - 4x + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x - 1 = -m \\ x^2 - 4x + 1 = -m \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 4x - 1$ và $y = x^2 - 4x + 1$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ.



Yêu cầu bài toán tương đương $f'(x^2 - 4x + m) = 0$ có đúng một nghiệm đơn khác 2 trong khoảng $(1; 4)$ suy ra: $\begin{cases} -4 \leq -m \leq -3 \\ -1 \leq -m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq m \leq 4 \\ -1 < m \leq 1 \end{cases}$.

Vậy có tất cả 4 giá trị.

Câu 44: Cho hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị. Tổng các giá trị nguyên của m là:

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m - 6 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 6$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2, 3, 4, 5\}$

Tổng các giá trị nguyên của m là 14.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x - 2)^2(x^2 + 3x - 4)$. Gọi S là tập các số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } y = g(x) = f(x^2 - 4x + m)$$

$$g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x + m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (x^2 - 4x + m - 2)^2 = 0 \\ h_1(x) = x^2 - 4x + m - 1 = 0 \\ h_2(x) = x^2 - 4x + m + 4 = 0 \end{cases} \quad (1).$$

$$(2)$$

Hàm số có 3 cực trị khi một trong 2 phương trình và có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và phương trình có lại có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h_1(2) \neq 0 \\ \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq m < 5 \\ \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 0 \end{cases} \end{array} \right] \Leftrightarrow 0 \leq m < 5.$$

Mà $m \in [-10; 10]$ do đó $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ có 5 phần tử.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)^2(x^2 - 2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

Lời giải

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x) \cdot f'(x^3 - 3x^2 + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1. \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 1$ (nếu có) dấu của $f'(x^3 - 3x^2 + m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ và $x^3 - 3x^2 + m = 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = -3x^2 + 6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$

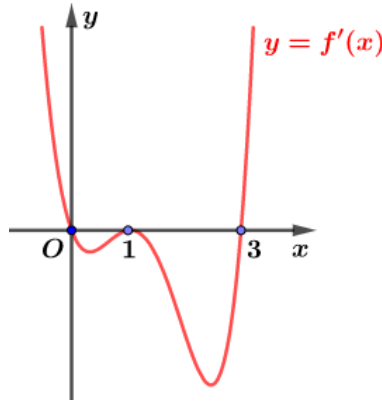
x	$-\infty$	0			2	$+\infty$
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$				4	
				0		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3 + 3x^2 = m$ và $-x^3 + 3x^2 = m - 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là

$$0 < m - 2 < m < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có đúng 3 điểm cực trị?



Lời giải

$$y' = 2x \cdot f'(x^2 + m).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 = -m + 3 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1. Do đó hoặc phương trình $x^2 + m = 1$ vô nghiệm hoặc nghiệm của phương trình $x^2 + m = 1$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y' = 0$.

Nếu $\begin{cases} -m \neq 0 \\ -m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì $x = 0$ là nghiệm đơn của phương trình $y' = 0$.

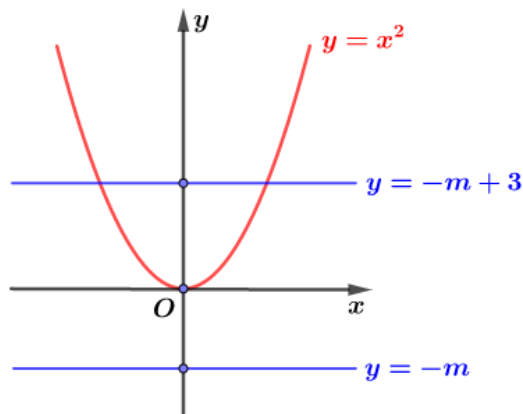
Nếu $\begin{cases} -m = 0 \\ -m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$ thì nghiệm $x = 0$ là nghiệm bội ba của phương trình $y' = 0$.

Suy ra $x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + m)$, $\forall m$.

Xét các phương trình: $x^2 = -m$ (1) và $x^2 = -m + 3$ (2).

Nhận xét: Phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung; $-m < -m + 3, \forall m$

Minh họa đồ thị



Xét $-m > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_3; x_4$. Khi đó y' đổi dấu 5 lần qua các nghiệm $x_1; x_2; x_3; x_4$ và 0 nên hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 5 điểm cực trị.

Xét $-m + 3 \leq 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm; phương trình (2) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 1 điểm cực trị.

Xét $\begin{cases} -m \leq 0 \\ -m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$. Khi đó phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$; phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Suy ra hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị thì $0 \leq m < 3$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $g(x) = f(-x^4 + 2x^2 - m)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 3)$?

Lời giải

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

*) Xét trên $(0; 3)$

$$g'(x) = (-4x^3 + 4x)f'(-x^4 + 2x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0; 3) \\ x = 1 \in (0; 3) \\ x = -1 \notin (0; 3) \\ f'(-x^4 + 2x^2 - m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 3) \\ f'(-x^4 + 2x^2 - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -x^4 + 2x^2 - m = 1 \\ -x^4 + 2x^2 - m = 2 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = -x^4 + 2x^2 - m$ trên $(0; 3)$

$$h'(x) = -4x^3 + 4x, h'(x) = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ trên } (0; 3) \text{ chỉ lấy nghiệm } x = 1$$

x	0	1	3
$h'(x)$		+	0
$h(x)$	$-m$	$1-m$	$-63-m$

Để hàm số $g(x)$ có 3 cực trị điều kiện $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bậc lẻ khi đó

$$\begin{cases} 1-m \leq 2 \\ -m < 1 < 1-m \\ -63-m < 1 \\ 2 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \\ -1 < m < 0 \\ -64 < m \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ -64 < m \leq -2 \end{cases}$$

Do m nguyên nên $m \in \{-63; -62; \dots; -2\}$ có 62 giá trị thỏa mãn bài toán.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $g(x) = f(x^4 + 2x^3 - mx^2)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 2)$?

Lời giải

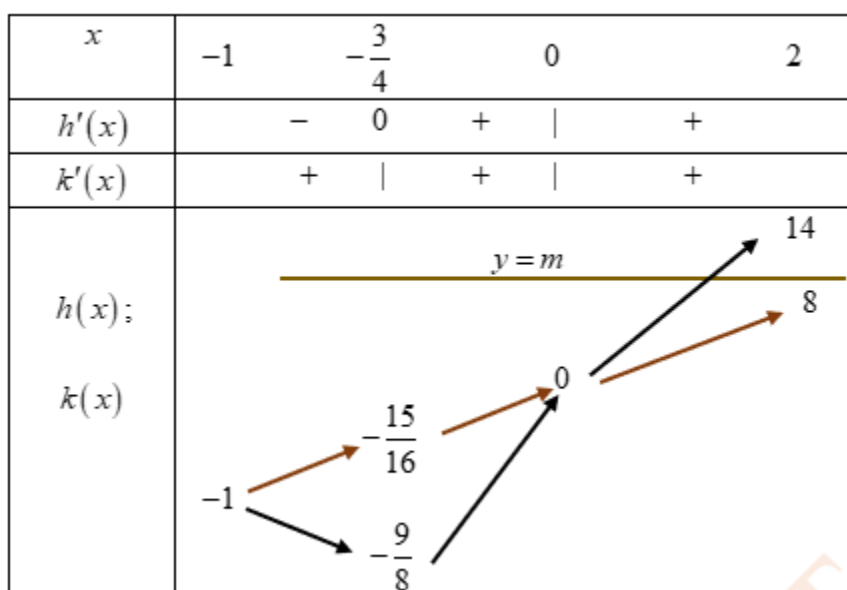
$$f'(x) = x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

*) Xét trên $(-1; 2)$

$$g'(x) = (4x^3 + 6x^2 - 2mx)f'(x^4 + 2x^3 - mx^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (-1; 2) \\ 4x^2 + 6x - 2m = 0 \\ x^4 + 2x^3 - mx^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (-1; 2) \\ 2x^2 + 3x = m(1) \\ x^2 + 2x = m(2) \end{cases}$$

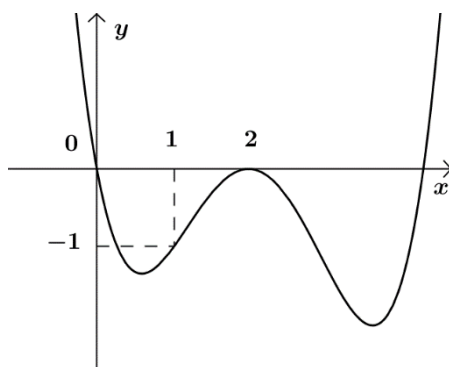
Xét hàm số $h(x) = 2x^2 + 3x$; $k(x) = x^2 + 2x$ trên $(-1; 2)$ có $h'(x) = 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$; $k'(x) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ lập bảng biến thiên của cả hai hàm $h(x)$; $k(x)$ trên cùng một hình ta được kết quả như sau:



Để hàm số $g(x)$ có 2 cực trị điều kiện $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm bậc lẻ mà $g'(x)$ đã có nghiệm $x = 0$ nên tổng hai phương trình (1); (2) có thêm một nghiệm khác 0, dựa vào bảng biến thiên trên ta có

$\begin{cases} m = -1 \\ 8 \leq m < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ 8 \leq m < 14 \end{cases}$ mà m là số nguyên nên $m \in \{-1; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$ có 7 giá trị

Câu 50: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



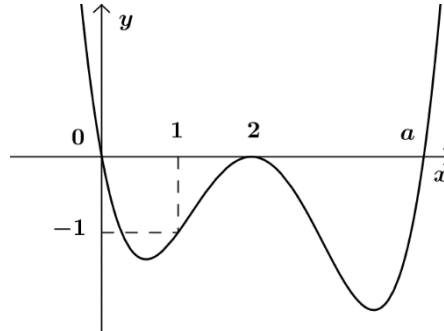
Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2024; 2024]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + m)$ là 5.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = (2x - 3) \cdot f'(x^2 - 3x + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 & (1) \\ f'(x^2 - 3x + m) = 0 & (2) \end{cases}$$

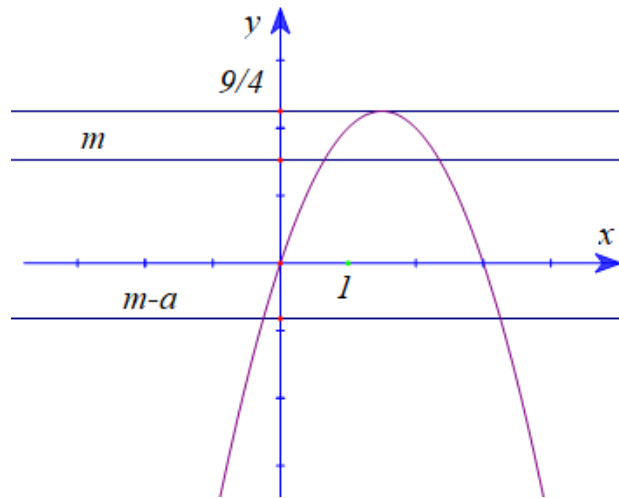
Ta có: (1) $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.



$$\text{Và (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - 3x + m = 2 \\ x^2 - 3x + m = a, a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x \\ m - 2 = -x^2 + 3x \\ m - a = -x^2 + 3x \end{cases}$$

Với $x^2 - 3x + m = 2$ thì $g'(x) = 0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y = -x^2 + 3x$ ta có đồ thị



Do $a > 2$, suy ra $m < \frac{9}{4}$. phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < \frac{9}{4}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2024; 2024] \Rightarrow m \in \{-2024; -2023; \dots; 2\}$. Vậy tập S có 2027 phần tử.